Tentamen i Matematisk fysik FTF131

Måndagen 8 januari 2018

Examinator: Henrik Johannesson, tel. 0768-237042.
Inga hjälpmedel är tillåtna på denna tentamen.

Tentamen består av fem uppgifter där varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade efter svårighetsgrad.

Strukturera Dina lösningar noggrant. **Uppställda samband skall motiveras**, gärna med en översiktlig skiss av tankegång och bärande element! Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

---

1. a) En studiekamrat till dig (som inte läst kursen i matematisk fysik!) är förbryllad över ett påstående hen hittat i sin lärobok i avancerad kvantmekanik:

If $G(t)$ is a response function, $\phi_{response}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')f_{cause}(t')\,dt'$, then for no effect to anticipate its cause we must have that the Fourier transform of $G(t)$ is analytic in the lower complex half-plane.

Kan du förklara påståendet för hen?

b) En kausal responsfunktion som den i a) kallas också *retarderad Greenfunktion.* Bestäm den retarderade Greenfunktionen till en driven harmonisk oscillator i en dimension.

2. Integraler av formen

$$C(t) = \int_0^t \cos(\pi x^2/2)\,dx, \qquad S(t) = \int_0^t \sin(\pi x^2/2)\,dx,$$

uppträder i diffraktionsteori och kallas *Fresnels integraler* efter den franske fysikern Augustin Fresnel. Kombinationen

$$C(t) + iS(t) = \int_0^t e^{i\pi x^2/2}\,dx$$

beskriver en s.k. *Cornuspiral* i det komplexa talplanet, uppkallad efter Fresnels medarbetare Cornu. Gränsvärdet

$$\lim_{t \to \infty} (C(t) + iS(t))$$

kan beräknas genom att välja en "smart kurva" i det komplexa talplanet och utnyttja att bidraget till integralen från kurvsegment långt från origo är försumbart. Beräkna integralen!
Ledning: $\int_0^\infty e^{-ar^2} dr = \sqrt{\pi/4a}$ där $a > 0$ är en rellvärd konstant.

3. Lös integralekvationen

$$y(x) = x + \lambda \int_0^1 (xz + z^2) y(z)\, dz.$$

4. Visa med hjälp av variationskalkyl att den kortaste vägen mellan två punkter är en rät linje.

5. Konjugatklasserna till permutationsgruppen S_n bestäms av strukturerna på cyklerna som representerar gruppelementen. T.ex., (12)(3)(4) och (14)(2)(3) i S_4 tillhör samma konjugatklass, medan (1234) och (1342) tillhör en annan konjugatklass.

a) Bestäm antalet gruppelement i varje konjugatklass till S_4.

b) Visa att S_4 har fem inekvivalenta irreps.

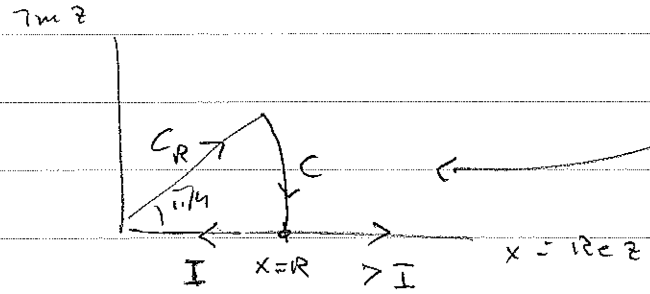
c) Två av de fem irrepsen i b) är en-dimensionella. Visa att av de resterande inekvivalenta irrepsen till S_4 så är två tre-dimensionella och en två-dimensionell.

Lösningsskisser till tentamen i
MATEMATISK FYSIK FTF131, 8/1 2018

1) Se föreläsningsanteckningar.

2) $$\int_0^\infty e^{i\pi x^2/2}\,dx = \int_{-I}\ldots + \cancel{\int_{>I}\ldots} \qquad (1)$$

försumbar enl. problemtext när $R\to\infty$ (se fig.)



residyteoremet

$$\int_{C_R}\ldots + \cancel{\int_{C}\ldots} + \int_{I}\ldots = 0 \Rightarrow \int_{-I}\ldots = \int_{C_R}\ldots \qquad (2)$$

$(R\to\infty)$

$$(1)\ \&\ (2) \Rightarrow \int_0^\infty e^{i\pi x^2/2}\,dx = \int_{C_{R\to\infty}} e^{i\pi z^2/2}\,dz$$

$$= \left\{ \text{välj } z = e^{i\pi/4} r \in C_R\ ;\ dz = e^{i\pi/4}dr \right\}$$

$$= e^{i\pi/4}\int_0^\infty e^{i\pi\left(e^{i\pi/4}r\right)^2/2}\,dr = e^{i\pi/4}\int_0^\infty e^{-\pi r^2/2}\,dr$$

$$= \frac{1}{2}(1+i)\,.$$

↑ använd ledning.

(2a.

3. Separabel kärna :

$$K(x,z) = xz + z^2 = \sum_{i=1}^{2} \phi_i(x)\varphi_i(z)$$

$$\Rightarrow \phi_1(x) = x,\ \phi_2(x) = 1,\ \varphi_1(z) = z,\ \varphi_2(z) = z^2$$

$$\Rightarrow \underline{y(x) = x + \lambda(c_1 x + c_2)} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} c_1 = \int_0^1 z(z + \lambda(c_1 z + c_2))\,dz = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\lambda c_1 + \frac{1}{2}\lambda c_2 \\ c_2 = \int_0^1 z^2(z + \lambda(c_1 z + c_2))\,dz = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\lambda c_1 + \frac{1}{3}\lambda c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = \frac{24+\lambda}{72-48-\lambda^2}, \quad c_2 = \frac{18}{72-48-\lambda^2} \qquad (2)$$

$$(1)\ \&\ (2) \Rightarrow y(x) = \frac{(72-24\lambda)x + 18\lambda}{72-48\lambda-\lambda^2}$$

lösning existerar för λ :
$72 - 48\lambda - \lambda^2 \neq 0$.

Komplement :

$$\underbrace{\varphi(x)}_{y(x)} = \underbrace{f(x)}_{x} + \lambda\int_a^b \underbrace{k(x,t)}_{(xz+z^2)}\underbrace{\varphi(t)\,dt}_{y(z)\,dz}, \quad k(x,t) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x) N_j(t)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j M_j(x)$$

$$c_j = \int_a^b N_j(t)\varphi(t)\,dt$$

$\longrightarrow$

(2b.

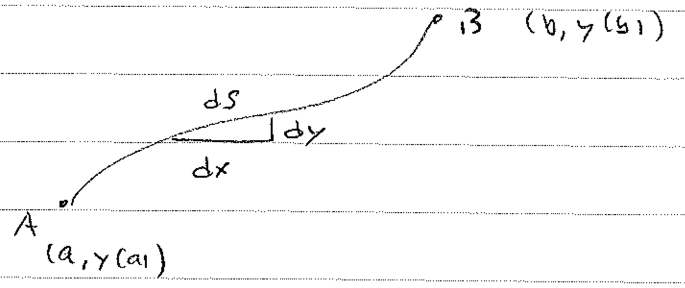
$$y(x) = x + \lambda \sum_{1,2} M_i(x) \underbrace{\int_0^1 N_i(z) y(z)\, dz}_{c_i}$$

Multiplicera med $N_j(x)$, integrera över $[a,b] = [0,1]$

$$\underbrace{\int N_j(x) y(x)\, dx}_{c_j} = \underbrace{\int N_j(x) f(x)\, dx}_{b_j} + \lambda \sum_i c_i \underbrace{\int N_j(x) M_i(x)\, dx}_{a_{ji}}$$

$$c_j = b_j + \lambda \sum_i a_{ji} c_i \Rightarrow (I - \lambda A) c = b$$

4.



$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = (1 + y'^2)^{1/2}\, dx$$

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b (1+y'^2)^{1/2}\, dx$$

inget explicit x- eller y-beroende $\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} = k = \text{konstant}$

konstant

Euler $\Rightarrow \quad y'/(1+y'^2)^{1/2} = k$

$$\Rightarrow k^2(1+y'^2) = y'^2 \Rightarrow y' = k/(1-k^2)^{1/2}$$

$\Downarrow$ integrera

$$y = \left[k/(1-k^2)^{1/2}\right] x + c$$

integrationskonstant

EKV. FÖR RÄT LINJE

$$\frac{1}{1+y'^2} = c^2 \Rightarrow 1 + y'^2 = \frac{1}{c^2} \Rightarrow y'^2 = \frac{1}{c} - 1 \Rightarrow y' = \pm\sqrt{\frac{1}{c} - 1} = K$$

$$\Rightarrow y = Kx + D$$

5a) Konjugatklasser till S_4 :

$\overline{I} = \{ (1)(2)(3)(4) \}$ 1 element

$\overline{II} = \{ (12)(3)(4), (13)(2)(4), (14)(2)(3),$
$(23)(1)(4), (24)(1)(3), (34)(1)(2) \}$ 6 element

$\overline{III} = \{ (123)(4), (132)(4), (124)(3), (142)(3),$
$(134)(2), (143)(2), (234)(1), (243)(1) \}$ 8

$\overline{IV} = \{ (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432) \}$ 6

$\overline{V} = \{ (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$ 3

b) # inekvivalenta irreps = # konjugatklasser = 5
(se föreläsningsanteckningar)

c) $\sum_{i=1}^{5} n_i^2 = 24$ ger omedelbart svaret givet informationen i problemtexten.
n_i dim av irrep $D^{(i)}$